

به نام خدا

زنجیره مارکوف

$$X \rightarrow Y \rightarrow Z$$

$$I(X; Y) \geq I(X; Z)$$

$$I(X; Y | Z) \leq I(X; Y) *$$

$$I(X; Y, Z) = I(\underbrace{Y, Z}_{\substack{\bar{X}_1 \\ \bar{X}_2}}; \underbrace{X}_{\bar{Y}}) = \underbrace{I(Y; X) + I(Z; X | Y)}$$

$$I(X_1, X_2, \dots, X_n; Y) = \sum_{i=1}^n I(X_i; Y | X_1, \dots, X_{i-1})$$

$$I(X; Y) = I(Y; X)$$

$$P(x, y(z)) = P(x|z) P(y|x, z)$$

$$P(x, y|z) = P(x|z) P(y|x, z)$$

زنجیره مارکوف $X \rightarrow Z \rightarrow Y$

زنجیره مارکوف $X \rightarrow Y \rightarrow g(Y)$

$$\Rightarrow I(X; Y) \geq I(X; \underbrace{g(Y)}_{\text{پردازش}}) \rightarrow$$

تساوی زنجیره انتقالی مفید که

نتیجه:

پردازش کردن اطلاعات
می‌فایده.

حدودى بر زنجيره هاى عاقل

رشته $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ يك زنجيره مارکوف تشکيل مى دهد اگر داشته باشيم.

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(x_1) P(x_2 | x_1) P(x_3 | x_2) \dots P(x_n | x_{n-1})$$

$$x_1 \longrightarrow x_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow x_n \longrightarrow \dots$$

به عبارت ديگر زنجيره $x_1, x_2, \dots, x_n$ يك زنجيره مارکوف تشکيل مى دهد اگر داشته باشيم

$$P(x_{n+r} | x_n, x_{n-m}) = P(x_{n+r} | x_n) \quad \forall n, m, r$$

$$x_{n-m} \longrightarrow (x_n) \longrightarrow x_{n+r}$$

$$P(x_n | x_{n-m}) = \chi$$

دنباله‌های مارکوف می‌توانند نامتغیر با زمان یا ایستایان بودن

نامتغیر با زمان بودن زنجیره مارکوف

اگر در دنباله مارکوف $P(x_{n+1} | x_n)$ به زمان قبلی نه‌اشته باشد (اندیس زمان n)
آنگاه دنباله مارکوف این نامتغیر با زمان گوییم

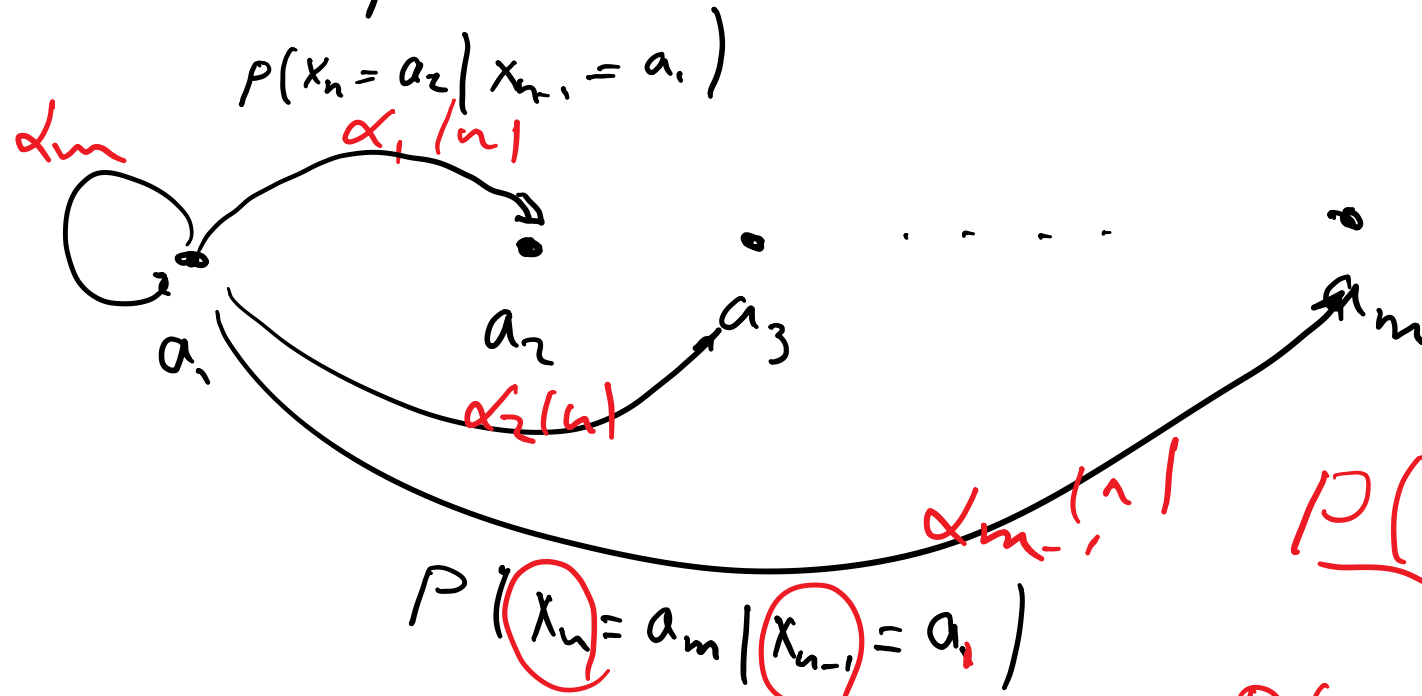
$$P(x_{n+1} = a | x_n = b) = P(x_2 = a | x_1 = b)$$

پیرمته $x(t)$

$$x_n \equiv x(n\tau)$$

$$x_{n-1} \equiv x((n-1)\tau)$$

$$X \in \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$$



$$X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \dots \rightarrow X_n$$

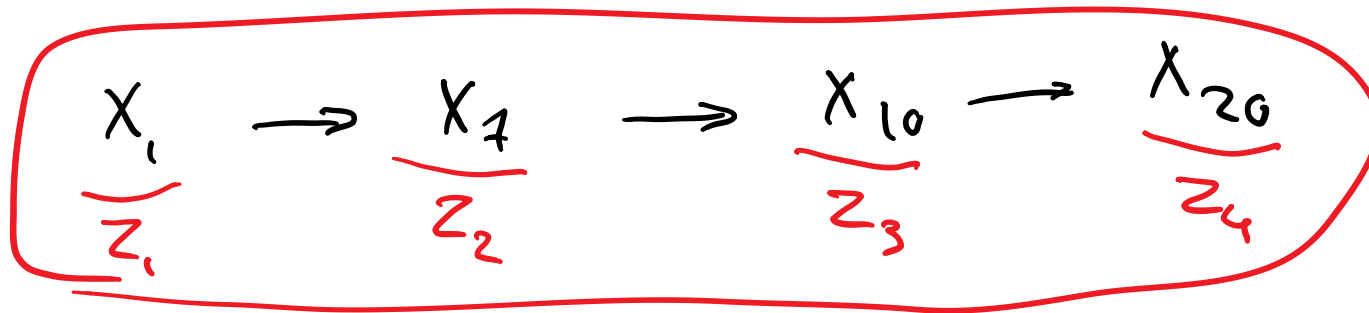
$$P(X_n | X_{n-r})$$

$$P(X_n | X_{n-2})$$

$$P(X_n | X_1)$$

$$P(X_n | X_{n-1}, X_{n-2})$$

$$P(Z_2 | Z_1)$$



مفهوم ایسایان بودن دنباله مارکوف

$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_n$$

اگر تاج احتمال تمام متغیرهای متوالی زنجیره

باشد. $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ نشان دهنده زنجیره مارکوف ایسایان نویسیم که ارائه می‌دهیم.

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(x_{1+l}, x_{2+l}, \dots, x_{n+l}) \quad \forall l > 0$$

$$P(x_1 = x_1, x_2 = x_2, \dots, x_n = x_n) = P(x_{1+l} = x_1, x_{2+l} = x_2, \dots, x_{n+l} = x_n)$$

برای تحلیل دنباله‌های مارکوف از ماتریس انتقال یا گذار استفاده می‌کنیم

Transition matrix

- ماتریس انتقال

• ضمیمه کنیم در دنباله

$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_n$ ، متغیرهای تصادفی

متادیری از مجموعه $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ را اختیار می کنند. در این صورت می توان

دنباله مارکوف را با یک ماتریس انتقال $P_{m \times m}^{(n)}$ نمایش داد.

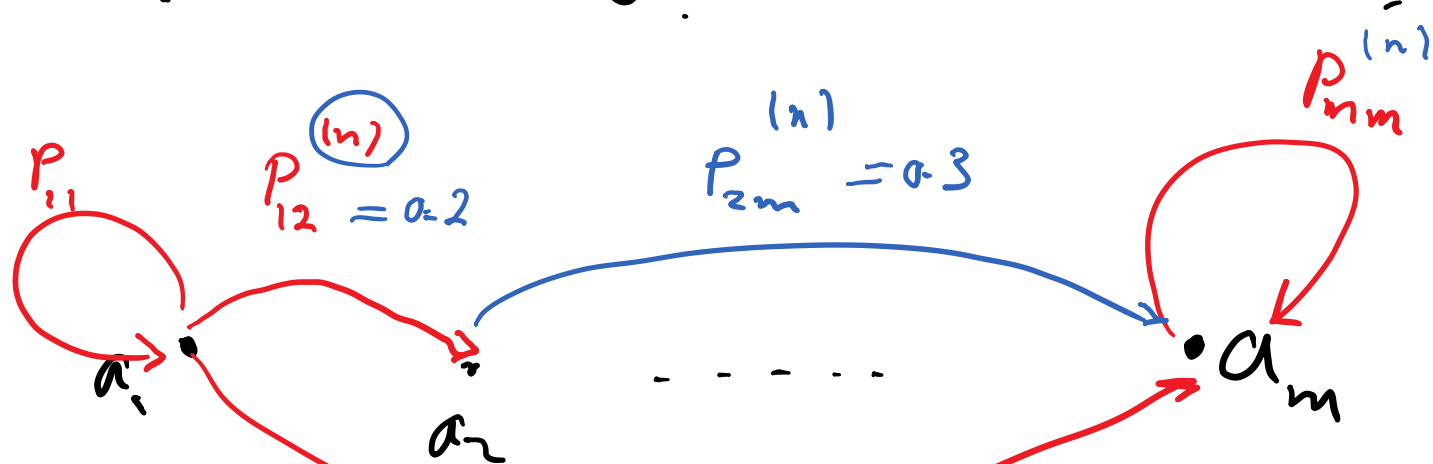
$$P^{(n)} = \left[P_{ij}^{(n)} \right]_{m \times m}$$

$$P_{ij}^{(n)} = P(X_n = a_j \mid X_{n-1} = a_i)$$

که در آن

در حالت کلی $P_{ij}^{(n)}$ تابع n (اندیس زمان) است.

آرگترسین لذار برای یک دنباله مارکوف به n سبک داشته باشد، دنباله مارکوف متغیر زمان است.



$$0.7 = p_{1m}^{(n)} = P(X_n = a_m | X_{n-1} = a_1)$$

$$P(X_n = a_2)$$

$$P(X_n = a | X_{n-1} = b) = \alpha_1^{(n)}$$

$$P(X_n = c | X_{n-1} = b) = \alpha_2^{(n)}$$

برای تحلیل دنباله‌های مارکوف به یک بردار حالت نیاز داریم.

— بردار حالت

برای یک دنباله مارکوف $X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \dots \rightarrow X_n \rightarrow \dots$ بردار حالت در زمان $n^{\text{ام}}$ را با $\underline{\mu}_n$

نمایش می‌دهیم

$$\underline{\mu}_n = [\mu_i^{(n)}]_{1 \times m}$$

که در آن

$$\begin{aligned} \mu_i^{(n)} &= P_r \{X_n = a_i\} \\ \Rightarrow P_r \{X_{n+1} = a_j\} &= \sum_{\substack{X_n = a_i \\ i=1}}^m \underbrace{P_r \{X_n = a_i\}}_{\mu_i^{(n)}} \underbrace{P\{X_{n+1} = a_j | X_n = a_i\}}_{P_{ij}^{(n)}} \end{aligned}$$

اگر رابطه قبل را برای $a_1, a_2, \dots, a_m$ بنویسیم به برداشت درجه $(n+1)$ می‌رسیم

$$\mu_{n+1} = \mu_n P = \mu_{n-1} P^2 = \dots = \mu_0 P^{n+1}$$

$$\mu_n = \mu_{n-1} P$$

- هر توانی از P ضرب ماتریس انتقال است.

- μ_n در حالت کلی تابع n است. اگر μ_{n-1} به n قبلی نداشته باشد، دنباله ماتریس ایستادن خواهد بود.

- برگزینی : $\mu_{n+1} = \mu_n$

- برابری حالت است
برای به دست آوردن برابری حالت است باید معادله تدریجی زیر را حل کنیم

$$\mu_P = \mu$$

برابری حالت است آن تحت شرایط خاصی وجود دارد، می باشد.

بسته به انتخاب μ مقادیر مختلفی برای μ خواهیم داشت، اما هر چه n افزایش یابد
(در زمان طولانی) حاصله بین جوابها کمتر می شود

قضیه: اگر μ_n و μ'_n در ترتیب آماری از یک دنباله مارکوف باشند، در این صورت

$$D(\mu_n // \mu'_n) \text{ با افزایش } n, \text{ کاهش می یابد.}$$

اثبات:

$$D(P(x_n, x_{n+1}) // q(x_n, x_{n+1})) = D(P(x_n) // q(x_n)) + D(P(x_{n+1} | x_n) // q(x_{n+1} | x_n))$$

$\uparrow$
 رابطه زنجیره‌ای

چون هر دو در مرتبه یک دنباله مارکوف هستند

$$= D(P(x_{n+1}) // q(x_{n+1})) + D(P(x_n | x_{n+1}) // q(x_n | x_{n+1}))$$

$\uparrow$
 رابطه زنجیره‌ای

≥ 0

$$D(P(x, y) \| q(x, y)) = D(P(x) \| q(x)) + D(P(y|x) \| q(y|x))$$

مادامی
رابطه تجزیه‌ای

$$\Rightarrow D(P(x_n) \| q(x_n)) \geq D(P(x_{n+1}) \| q(x_{n+1}))$$

نتیجه: اگر برای دنباله مارکوف بردار حالت ایستادن μ وجود داشته باشد، بردار حالت μ_n در زمان به سمت μ میل خواهد کرد.

$$D(\mu_n \| \mu) \xrightarrow{\text{افزایش } n} 0$$

$$D(\mu_n \| \mu) \leq D(\mu_{n+1} \| \mu)$$

در حالت کلی $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ دقیقاً برابر بهترین شود ولی اگر برابر حالت استیسان وجود داشته باشد، این باشد، و جمله دقیقاً صفر خواهد شد. (هر جوابی به شکل $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ به μ میل خواهد کرد با حاصل صفر)

2) 2, 4, 5, 6, 12, 14, 15, 30, 42

